

# PENGEMBANGAN MODEL PERSEDIAAN *ECONOMIC MANUFACTURING QUANTITY (EMQ)* YANG *MULTI ITEM* DAN *PROBABILISTIK*

Sigit Susanto<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>*Program Studi Teknologi Pengolahan Karet dan Plastik, Politeknik ATK Yogyakarta  
sigits.kawandhasor@gmail.com*

## Abstrak

*Pada era globalisasi seperti sekarang ini, terjadi kebebasan arus produk sehingga membuat persaingan antar perusahaan menjadi semakin ketat. Agar dapat survive, perusahaan PT. XYZ harus melakukan kegiatannya secara efektif dan efisien pada semua lini bagiannya. Salah satu lini tersebut adalah lini gudang atau persediaan. Sistem persediaan yang ada dan dijalankan oleh PT XYZ merupakan lingkungan produksi yang memproduksi lebih dari satu produk akhir dan permintaan terhadap produknya tersebut tidak pasti. Berdasarkan kondisi PT XYZ tersebut, penulis mendekati system persediaan yang ada pada PT XYZ dengan model persediaan Economic Manufacturing Quantity, multi item, dan probabilistic. Solusi terhadap model yang dibangun, diperoleh menggunakan bantuan spreadsheet.*

**Kata Kunci:** *Economic Manufacturing Quantity, Multi Item, Probalistik, Spreadsheet.*

## Pendahuluan

Agar suatu perusahaan tidak kehilangan konsumennya, suatu perusahaan memerlukan sistem pengendalian persediaan guna memenuhi permintaan konsumennya secara tepat baik dalam jenis, jumlah, kualitas, maupun waktunya. Berdasarkan latar belakang di atas, dapat disimpulkan bahwa rumusan masalah yang dihadapi perusahaan adalah sebagai berikut: Berapakah jumlah produksi optimum (Q) dan tingkat ROP (Re-Order Point/titik pemesanan kembali) serta *safety stock* (S) yang harus dimiliki untuk menghasilkan total biaya persediaan yang minimum pada kondisi yang probabilistik dan adanya *stockout* untuk setiap jenis produk menggunakan model persediaan yang sesuai?

Tujuan yang ingin diperoleh dalam penelitian ini yaitu:

1. Menentukan ukuran produksi ekonomis tiap jenis produk (Q) yaitu jumlah produk yang harus diproduksi untuk tiap jenis produk setiap kali dilakukan produksi dan menentukan reorder point tiap jenis produk (B) yaitu jumlah persediaan yang tersedia dimana dilakukan persiapan produksi untuk melakukan produksi tahap berikutnya yang meminimumkan total biaya persediaan.
2. Menentukan persediaan pengaman/*safety stock* tiap jenis produk (S) yaitu persediaan untuk mengatasi ketidakpastian terhadap permintaan yang meminimumkan total biaya persediaan.

## Metodologi Penelitian

Metodologi penelitian dan diagram alir penelitian dapat dilihat pada Gambar 1 berikut ini:

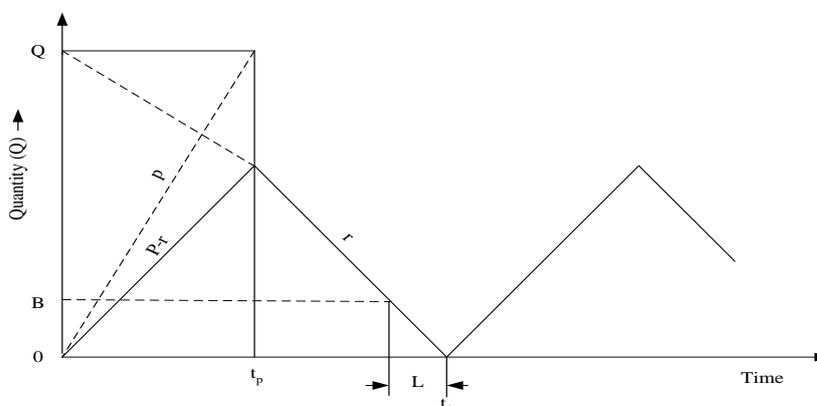


## Landasan Teori

### Daftar Notasi:

- $R$  = permintaan (*demand*) tahunan  
 $P$  = biaya pembelian per unit (untuk Model EOQ) atau biaya produksi per unit (untuk Model EMQ).  
 $C$  = biaya pesan per pesan (untuk Model EOQ) atau biaya persiapan per persiapan produksi (untuk Model EMQ)  
 $Q$  = besarnya pesanan setiap pesan (untuk Model EOQ) atau besarnya produksi setiap produksi (untuk Model EMQ)  
 $Q^*$  = besarnya pesanan ekonomis (untuk Model EOQ) atau besarnya produksi ekonomis (untuk Model EMQ)  
 $L$  = *lead time*  
 $H$  = biaya simpan per unit per tahun  
 $B$  = *reorder point* (titik pemesanan kembali)  
 $p$  = *Production rate* (kecepatan produksi)  
 $r$  = *Demand rate* (kecepatan permintaan)  
 $t_p$  = *Time to produce* (waktu yang diperlukan untuk melakukan produksi)  
 $A$  = biaya kekurangan per unit  
 $TC(Q)$  = total biaya persediaan sebagai fungsi  $Q$   
 $S$  = *safety stock*/persediaan pengaman  
 $\bar{M}$  = rata-rata permintaan saat *lead time*  
 $P(M > B)$  = *probability of a stockout*/kemungkinan terjadinya kekurangan  
 $P(s)$  = probabilitas kekurangan yang optimum  
 $E(M > B)$  = *expected number of stockout*/jumlah kekurangan yang diharapkan  
 $TC(Q, k)$  = total biaya persediaan sebagai fungsi  $Q$  dan  $k$   
 $p_u \geq (k)$  = probabilitas *stockout*  
 $\sigma_L$  = standar deviasi permintaan saat *lead time*  
 $G_u(k)$  = fungsi khusus dari distribusi normal baku untuk mencari jumlah *stockout* yang diharapkan.

### Model Persediaan *Economic Manufacturing Quantity* (EMQ) Deterministik.



Gambar 2. Model EPQ Deterministik

Rumus:

Total Biaya Persediaan = Biaya Produksi + Biaya Persiapan + Biaya Simpan

$$TC(Q) = PR + \frac{CR}{Q} + \frac{HQ(p-r)}{2p} \quad (2.4)$$

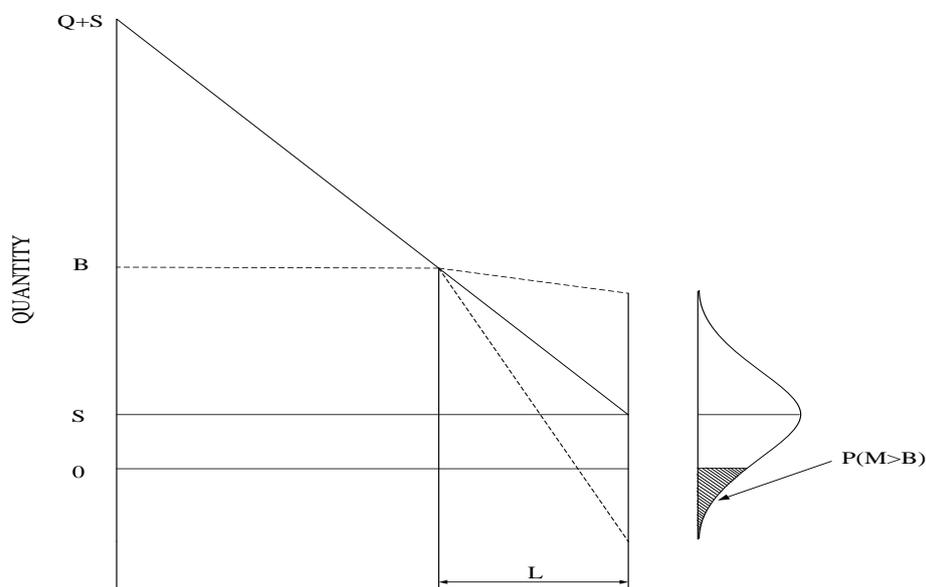
$$\text{Jumlah produksi ekonomis, } Q^* = \sqrt{\frac{2CRp}{(H)(p-r)}} \quad (2.5)$$

$$\text{Reorder point produksi, } B = \frac{RL}{N} = rL \quad (2.6)$$

Asumsi model di atas adalah sebagai berikut:

1. *Constant Demand Rate* (barang diambil dari persediaan dengan kecepatan permintaan yang tetap).
2. *Constant Production Rate* (kecepatan produksinya konstan).
3. Kecepatan produksinya lebih besar daripada kecepatan permintaannya.
4. *Lead time* diketahui dengan pasti dan konstan.
5. Tidak diijinkan terjadi *stockout*/kekurangan persediaan.
6. *Noninstantaneous receipt* (penerimaan dalam barang ke dalam penyimpanan terjadi secara berangsur-angsur).

### Model EOQ Probabilistik dengan *Demand Variabel* dan *Lead Time Konstan*.



Gambar 3. Model EOQ Probabilistik (*demand* variabel dan *lead time* konstan) untuk kasus *lost sales* dengan biaya *stockout* per unit

Rumus:

Total Biaya Persediaan = Biaya Pembelian + Biaya Tetap per Siklus (Biaya Pesan + Biaya *Stockout*) + Biaya Simpan

$$TC = RP + \frac{R}{Q} [C + A.E(M > B)] + H \left[ \frac{Q}{2} + (B - \bar{M}) + E(M > B) \right] \quad (2.7)$$

$$\text{Jumlah pesanan ekonomis, } Q^* = \sqrt{\frac{2R[C + A.E(M > B)]}{H}} \quad (2.8)$$

$$\text{Probabilitas } Stockout \text{ yang optimum, } P(M > B) = P(s) = \frac{HQ}{AR + HQ} \quad (2.9)$$

Menurut Silver dkk [1], untuk data yang berdistribusi normal, total biaya persediaannya menjadi sebagai berikut:

$$TC = RP + \frac{CR}{Q} + H \left\{ \frac{Q}{2} + k\sigma_L \right\} + \frac{A \cdot \sigma_L \cdot G_u(k) \cdot R}{Q} \quad (2.10)$$

### **Convolution**

Setelah diketahui jenis distribusi permintaan yang dilakukan dengan uji Kolmogorov Smirnov, selanjutnya untuk mencari permintaan saat *lead time*, diperlukan *convolution*. Berikut ini merupakan *convolution* untuk permintaan yang berdistribusi normal.

Menurut Smith [2], berdasarkan pada pertimbangan kemudahan sistem dan efisiensi dalam perhitungan, sering bahwa kasus distribusi permintaan diperkirakan dalam suatu interval waktu dasar seperti mingguan.

Pertimbangkan periode  $n$  berikutnya, selama permintaan merupakan variabel acak  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Rata-rata dan varian dari distribusi permintaan ini yaitu  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  dan  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ . Sekarang, pertimbangkan permintaan selama periode  $n$  yang akan menjadi  $y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ .  $y$  juga akan merupakan variabel acak dan distribusinya disebut sebagai suatu *convolution* dari distribusi  $x$ .

Rata-rata dari distribusi  $y$  adalah sebagai berikut:

$$\mu_y = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

Jika distribusi  $x$  semua mempunyai rata-rata yang sama,  $\mu_x$ , maka

$$\mu_y = n\mu_x \quad (2.22)$$

Sedangkan varian  $y$  adalah sebagai berikut

$$\sigma_y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

Sehingga, standar deviasi  $y$  adalah sebagai berikut

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$$

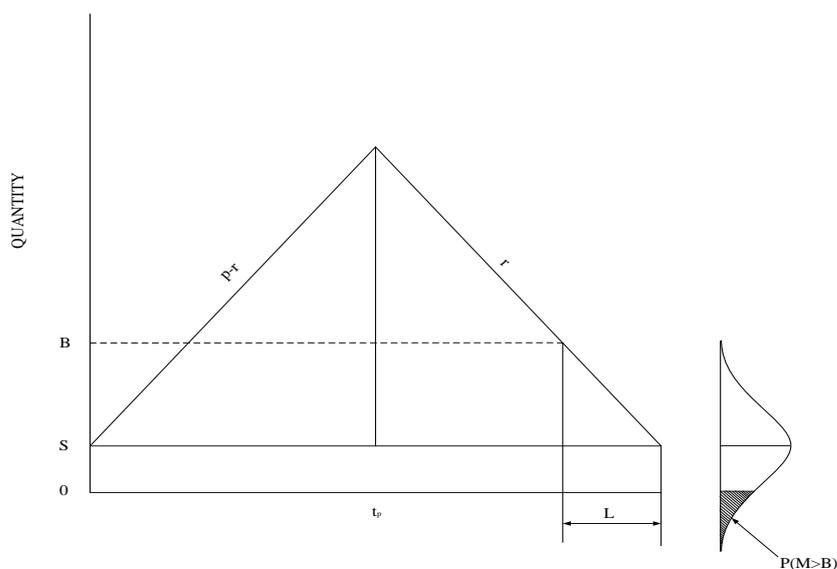
Jika distribusi  $x$  semuanya memiliki varian yang sama,  $\sigma_x^2$ , maka

$$\sigma_y = \sqrt{n}\sigma_x \quad (2.23)$$

### Tinjauan Pustaka dan Pengembangan Hipotesis

Berdasarkan kondisi PT XYZ, terutama pada sistem persediaannya, penulis berusaha mendekati model persediaan PT XYZ dengan cara menggabungkan Model Persediaan *Economic Manufacturing Quantity* (EMQ) Deterministik dan Model EOQ Probabilistik (dengan *Demand* Variabel dan *Lead Time* Konstan) sehingga diperoleh model persediaan EMQ probabilistik.

### Model EMQ Probabilistik (dengan *Demand* Variabel dan *Lead time* Konstan)



Gambar 4. Model EPQ Probabilistik (variabel *demand* dan konstan *lead time*) untuk kasus *lost sales* dengan biaya *stockout* per unit

Rumus:

Total Biaya Persediaan = Biaya Persiapan + Biaya Produksi + Biaya Simpan+ Biaya Kekurangan

$$TC(Q, k) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot \frac{R_i}{Q} + \sum_{i=1}^n P_i R_i + \sum_{i=1}^n H_i \left\{ \frac{Q_i}{2} \cdot \frac{(p_i - r_i)}{p_i} + k_i \cdot \sigma_L \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{A_i R_i}{Q} + H_i \right\} \cdot \sigma_L \cdot G_u(k) \quad (2.11)$$

Untuk mendapatkan jumlah produksi yang optimum untuk setiap siklus produksi, dapat diperoleh dengan menurunkan Total Biaya Persediaan (TC) terhadap jumlah produksi (Q) dan menyamakannya dengan nol (0).

$$\frac{\partial TC}{\partial Q} = \frac{\partial \left( C.R.Q^{-1} + \frac{H}{2} \cdot \frac{(p-r)}{p} \cdot Q + A.R.\sigma_L.G_u(k).Q^{-1} \right)}{\partial Q}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2}{H} \cdot \frac{p}{(p-r)} \cdot \{C.R + A.R.G_u(k).\sigma_L\}}$$

(2.12)

Dengan  $\sigma_L$  = standar deviasi permintaan saat *lead time*

$$\frac{dG_u(k)}{dk} = -p_u \geq (k)$$

$$G_u(k) \sigma_L = \{f_u(k) - k.p_u \geq (k)\} \sigma_L$$

(2.13)

atau dapat dicari dengan *Microsoft Excel* dengan rumus

$$G_u(k) = \{NORMDIST(k;0;1;0) - k \cdot (1 - NORMSDIST(k))\} \sigma_L$$

(2.14)

Probabilitas *stockout*nya dapat diperoleh dengan menurunkan TC terhadap k dan menyamakannya dengan 0 (nol).

$$\frac{\partial TC}{\partial k} = \frac{\partial \left( H.\sigma_L.k + \frac{A.R}{Q} \cdot \sigma_L.G_u(k) + H.\sigma_L.G_u(k) \right)}{\partial k}$$

$$p_u \geq (k) = \frac{H.Q}{A.R + H.Q}$$

(2.15)

Nilai k dapat diperoleh melalui fungsi inversnya,  $k = p_u^{-1} \left( \frac{H.Q}{A.R + H.Q} \right)$

atau dapat dicari dengan *Microsoft Excel* sebagai berikut:  
 $k = \text{NORMSINV}(1 - p_u \geq (k))$ 

(2.16)

### Hasil dan Pembahasan

Berikut ini merupakan Tabel 1 yang merupakan parameter beserta nilainya yang digunakan dalam menentukan total biaya persediaan tahunan. Indeks ke-1 merupakan parameter beserta nilainya untuk item ke-1, sedangkan indeks ke-2 merupakan parameter beserta nilainya untuk item ke-2.

Tabel 1. Parameter dan nilai untuk menentukan total biaya persediaan tahunan

No	Notasi item ke-1	Nilai	Notasi item ke-2	Nilai
1	$R_1$	4.040.880 (unit)	$R_2$	3.434.748 (unit)
2	$\sigma_{y1}$	489.721 (unit)	$\sigma_{y2}$	416.263 (unit)
3	$P_1$	Rp3.350	$P_2$	Rp6.700
4	$H_1$	Rp209	$H_2$	Rp418
5	$A_1$	Rp247	$A_2$	Rp494
6	$C_1$	Rp5.245.614	$C_2$	Rp10.491.228
7	$L_1$	0,0192 (tahun)	$L_2$	0,0385 (tahun)
8	$\frac{(p_1 - r_1)}{p_1}$	0,2036	$\frac{(p_2 - r_2)}{p_2}$	0,6760

Perhitungan selengkapnya dalam mendapatkan jumlah produksi optimal beserta total biaya persediaan tahunannya dapat dilihat pada Tabel 2 dan Tabel 3. Permasalahan PT XYZ didekati dengan Model Persediaan *Economic Manufacturing Quantity* (EMQ) Probabilistik yang diperoleh dengan penggabungan antara model *Economic Order Quantity* (EOQ) Probabilistik dengan *Economic Manufacturing Quantity* (EMQ) Deterministik. Sedangkan kondisi PT. XYZ yang multi item didekati dengan sigma. Untuk mendapatkan total biaya persediaan tahunan semua item yang ada pada perusahaan, maka dihitung total biaya persediaan tahunannya untuk semua item, dari item ke-i sampai dengan item ke-n. Pada penelitian ini digunakan 2 (dua) item yang ada pada PT XYZ untuk digunakan dalam perhitungan, seperti terlihat pada Tabel 1.2. dan Tabel 2.3. Untuk item ke-1 ukuran produksi ekonomisnya sebesar 1.202.935 unit, reorder pointnya sebesar 134.573 unit, persediaan pengamannya sebesar 56.863 unit. Sedangkan untuk item ke-2 ukuran produksi ekonomisnya sebesar 505.039 unit, reorder pointnya sebesar 178.331.197 unit, persediaan pengamannya sebesar 178.265.144 unit.

Tabel 2. Perhitungan Total Biaya Persediaan Tahunan untuk item ke-1.

Model EMQ Probabilistik untuk Item ke-1		Keterangan Rumus yang Digunakan	
<b>Masukan</b>			
Biaya persiapan per persiapan	$C_1$	Rp5.245.614	
Biaya simpan per liter per tahun	$H_1$	Rp209	
Rata-rata permintaan tahunan	$R_1$	4.040.880	
Simpangan baku permintaan tahunan	$\sigma_{y1}$	489.721	
Lead time dalam tahun	$L_1$	0,0192	
Biaya produksi per liter	$P_1$	Rp3.350	
Biaya kekurangan per liter kekurangan	$A_1$	Rp247	
$(p-r)/p$		0,2036	
<b>Permintaan saat lead time</b>			
Rata-rata		77.709	$\mu_y = n\mu_x$ (2.22)
Simpangan baku		67.912	$\sigma_y = \sqrt{n}\sigma_x$ (2.23)
<b>Kebijakan Produksi</b>			
Jumlah produksi		1.202.935	$Q = \sqrt{\frac{2}{H} \cdot \frac{P}{(p-r)} \{CR + AR G_k(k) \sigma_L\}}$ (2.12)
$p \geq (k)$		0,2012	$p_{\geq}(k) = \frac{H \cdot Q}{AR + H \cdot Q}$ (2.15)
Faktor k untuk perhitungan persediaan pengaman		0,84	$k = \text{NORMSINV}(1 - p_{\geq}(k))$ (2.16)
$E(M > B)$		7640,30	$G_k(k) = \{ \text{NORMDIST}(k; 0; 1; 0) - k * (1 - \text{NORMSDIST}(k)) \} \sigma_L$ (2.14)
Persediaan pengaman	$k\sigma_L$	56.863	
Reorder point	$\mu_y + k\sigma_L$	134.573	
<b>Biaya Tahunan</b>			
Biaya persiapan tahunan		Rp17.620.980	$C \cdot \frac{R}{Q}$
Biaya produksi tahunan		Rp13.536.948.000	$P \cdot R$
Biaya simpan tahunan		Rp37.478.338	$H \left\{ \frac{Q}{2} \cdot \frac{(p-r)}{p} + k\sigma_L \right\}$
Biaya kekurangan tahunan		Rp6.339.295	$\left\{ \frac{AR}{Q} + H \right\} \sigma_L G_k(k)$
Total biaya tahunan		Rp13.598.386.612	$TC(Q, k) = C \cdot \frac{R}{Q} + P \cdot R + H \left\{ \frac{Q}{2} \cdot \frac{(p-r)}{p} + k\sigma_L \right\} + \left\{ \frac{AR}{Q} + H \right\} \sigma_L G_k(k)$ (2.11)

Tabel 3. Perhitungan Total Biaya Persediaan Tahunan untuk item ke-2.

		Model EMQ Probabilistik untuk Item ke-2	
Masukan			Keterangan Rumus yang Digunakan
Biaya persiapan per persiapan	$C_2$	Rp10.491.228	
Biaya simpan per liter per tahun	$H_2$	Rp418	
Rata-rata permintaan tahunan	$R_2$	3.434.748	
Simpangan baku permintaan tahunan	$\sigma_{y2}$	416.263	
Lead time dalam tahun	$L_2$	0,0385	
Biaya produksi per liter	$P_2$	Rp6.700	
Biaya kekurangan per liter kekurangan	$A_2$	Rp494	
$(p-r)/p$		0,6760	
<b>Permintaan saat lead time</b>			
Rata-rata		Rp66.053	$\mu_y = n\mu_x$ (2.22)
Simpangan baku		Rp57.725	$\sigma_y = \sqrt{n}\sigma_x$ (2.23)
<b>Kebijakan Produksi</b>			
Jumlah produksi		505.039	$Q = \sqrt{\frac{2}{H} \cdot \frac{P}{(P-r)} \cdot \{C.R + A.R.G_k(k) \cdot \sigma_L\}}$ (2.12)
$p \geq (k)$		0,1107	$p_{\geq}(k) = \frac{H.Q}{A.R + H.Q}$ (2.15)
Faktor k untuk perhitungan persediaan pengaman		1,2231	$k = \text{NORMSINV}(1 - p_{\geq}(k))$ (2.16)
$E(M > B)$		3.088	$G_k(k) = \{\text{NORMDIST}(k; 0; 1; 0) - k \cdot (1 - \text{NORMSDIST}(k))\} \sigma_L$ (2.14)
Persediaan pengaman	$k\sigma_L$	178.265.144	
Reorder point	$\mu_y + k\sigma_L$	178.331.197	
<b>Biaya Tahunan</b>			
Biaya persiapan tahunan		Rp71.350.382	$C \cdot \frac{R}{Q}$
Biaya produksi tahunan		Rp23.012.811.600	$P.R$
Biaya simpan tahunan		Rp249.615.527	$H \left\{ \frac{Q}{2} \cdot \frac{(p-r)}{p} + k\sigma_L \right\}$
Biaya kekurangan tahunan		Rp10.375.270	$\left\{ \frac{A.R}{Q} + H \right\} \sigma_L G_k(k)$
Total biaya tahunan		Rp23.344.152.779	$T C(Q, k) = C \cdot \frac{R}{Q} + P.R + H \left\{ \frac{Q}{2} \cdot \frac{(p-r)}{p} + k\sigma_L \right\} + \left\{ \frac{A.R}{Q} + H \right\} \sigma_L G_k(k)$ (2.11)

## Kesimpulan

Model persediaan EMQ yang multi item dan probabilistic dapat diperoleh dengan menggabungkan antara model persediaan EOQ probabilistik dengan model persediaan EMQ deterministic yang dilanjutkan dengan penambahan fungsi sigma untuk mendapatkan multi item. Total biaya persediaan tahunannya diperoleh dengan mengakumulasikan total biaya persediaan tahunannya setiap item, dari item ke-i sampai dengan item ke-n. Berisi berbagai kesimpulan yang di ambil berdasarkan penelitian yang telah dilakukan. Berisi pernyataan singkat tentang hasil yang disarikan dari pembahasan. Saran dapat dituliskan pada bagian paling akhir.

## Daftar Pustaka

- [1] E.A. Silver, D.F. Pyke, R. Peterson, *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, 3<sup>rd</sup> ed, John Wiley & Sons, 1998.
- [2] B.S. Smith, *Computer-Based Production and Inventory Control*, Prentice-Hall International, Inc, 1989.
- [3] F. Ayres Jr, E. Mendelson, &G. Reece, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Differential and Integral Calculus*, 3<sup>rd</sup> ed in SI Units, McGraw-Hill Book Company, 1992.
- [4] E.A. Elsayed., T.O. Boucher, *Analysis and Control of Production Systems*, 2<sup>nd</sup>, Prentice-Hall International., 1994.
- [5] H.P. Hsu., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes*, McGraw-Hill, 1997
- [6] L.A. Johnson, & D.C. Montgomery, *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control*, John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- [7] A.M. Law, & W.D. Kelton, *Simulation Modeling and Analysis*, 2<sup>nd</sup> ed, McGraw-Hill Inc., 1991.
- [8] R.I. Levin, D.S. Rubin, J.P. Stinson, dan E.S Gardner Jr, *Quantitative Approaches to Management*, 8<sup>th</sup> ed, McGraw-Hill, Inc, 1992.
- [9] J.H. Moore, & L.R. Weatherford, *Decision Modeling with Microsoft Excel*, 6<sup>th</sup> ed, New Jersey: Prentice Hall Upper Saddle River, 2001.
- [10] S. Nahmias, *Production and Operations Analysis*, 3<sup>rd</sup> ed, McGraw-Hill Intenational Edition, 1997.
- [11] D. Sipper, & R.L. Bulfin, Jr, *Production: Planning, Control, and Integration*, The MacGraw-Hill Companies, Inc, 1998.
- [12] M.K. Starr, & D.W. Miller, *Inventory Control: Theory and Practice*, New Delhi: Prentice-Hall of India Private Limited, 1974.
- [13] R.J. Tersine, *Principles of Inventory and Materials Management*, 4<sup>th</sup>ed., New Jersey: Prentice-Hall International Inc, 1994.
- [14] R.E. Walpole., *Pengantar Statistika*, edisi ke-3, Jakarta: Gramedia Pustaka Utama, 1995.
- [15] R.E. Walpole, R.H. Myers, &S.L. Myers, *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 6<sup>th</sup> ed, Prentice Hall International, Inc, 1998.